BÖLCS BAGOLY LEVELEZŐS MATEMATIKAVERSENY

2014 – 2015.

IV. forduló

MEGOLDÁSOK

1. **Melyik az a három prímszám, amelynek szorzata egyenlő az összegük hétszeresével?**

MEGOLDÁS:

$$p \cdot q \cdot r = 7(p+q+r)$$

A jobb oldal osztható 7 – tel, akkor a baloldal is osztható 7 – tel.

Ebből következik, hogy a baloldalon az egyik szám a 7 – es.

Legyen $r = 7 \quad \Rightarrow p \cdot q \cdot 7 = 7(p+q+7)$

$$p \cdot q = p + q + 7$$

Az egyenletet figyelmesen vizsgálva, sejthető, hogy a kisebb prímszámok köréiben célszerű keresni a megoldást.

Legyen $p = 2 \Rightarrow 2q = 2 + q + 7 \Rightarrow q = 9.$

Nem megoldás, mert a 9 összetett szám.

Legyen $p = 3 \Rightarrow 3q = 3 + q + 7 \Rightarrow 2q = 10 \Rightarrow q = 5.$

$$p = 3 \quad q = 5 \quad r = 7$$

Legyen $p = 5 \Rightarrow 5q = 5 + q + 7 \Rightarrow 4q = 12 \Rightarrow q = 3.$

Nem ad másik megoldást.

Legyen $p = 11 \Rightarrow 11q = 11 + q + 7 \Rightarrow 10q = 18 \Rightarrow q = 1{,}8.$

Nem megoldás.

Legyen $p = 13 \Rightarrow 13q = 13 + q + 7 \Rightarrow 12q = 20 \Rightarrow q = nem\ egész\ szám.$

A keresett prímszámok: 3; 5; 7.

A feladatra 10 pont kapható

BÖLCS BAGOLY LEVELEZŐS MATEMATIKAVERSENY

2014 – 2015.

IV. forduló

MEGOLDÁSOK

2. **Hány olyan,** tízes számrendszerbeli **páros ötjegyű szám van,** amelyben a számjegyek különbözőek?

MEGOLDÁS:

Egy szám páros, ha az utolsó számjegy: 0, 2, 4, 6, 8.

Ha az utolsó számjegy: 0.

Az 1. számjegy helyére 9 féle számjegyet írhatunk, a 2. számjegy helyére 8 féle számjegyet írhatunk, a 3. számjegy helyére 7 féle számjegyet írhatunk és a 4. számjegy helyére 6 féle számjegyet írhatunk.

Összesen: $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$ darab szám van.

Ha az utolsó számjegy: 2.

Az 1. számjegy helyére 8 féle számjegyet írhatunk,(az első számjegy helyére nulla nem kerülhet) a 2. számjegy helyére 8 féle számjegyet írhatunk, a 3. számjegy helyére 7 féle számjegyet írhatunk és a 4. számjegy helyére 6 féle számjegyet írhatunk.

Összesen: $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 2688$ darab szám van.

Ugyanígy számolható, ha az utolsó számjegy: 4, 6, 8.

Összesen:

$3024 + 4 \cdot 2688 = 13\,766$ **db feltételeknek megfelelő szám van.**

A feladatra 10 pont kapható.

BÖLCS BAGOLY LEVELEZŐS MATEMATIKAVERSENY

2014 – 2015.

IV. forduló

MEGOLDÁSOK

3. Igazoljuk, hogy a $3^{202} + 5 \cdot 3^{210} + 1$ összetett szám!

<u>MEGOLDÁS:</u>

Az összetett számnak van valódi osztója.

Vizsgáljuk meg, hogy a fenti kifejezés osztható – e valamilyen pozitív egész számmal!

Vizsgáljuk meg a 3 hatványinak végződését!

$3^0 = 1 \quad 3^1 = 3 \quad 3^2 = 9 \quad 3^3 = \_7 \quad 3^4 = \_1 \quad 3^5 = \_3 \quad 3^6 = \_9 \quad 3^7 = \_7 \quad 3^8 = \_1.$

A háromnak minden negyedik hatványának ugyanaz a végződése.

$3^{202} \rightarrow$ végződése: 9. (202 : 4 → a maradék 2)

$3^{210} \rightarrow$ végződése: 9. (210 : 4 → a maradék 2)

$5 \cdot 3^{210} \rightarrow$ végződése: 5.

Az összeg: □9 + □5 + 1 = □5.

Ha egy szám végződése 5, akkor a szám osztható 5 – tel.

A vizsgált összeg utolsó számjegye 5,
így a szám összetett szám.

A feladatra 10 pont kapható.

BÖLCS BAGOLY LEVELEZŐS MATEMATIKAVERSENY

2014 – 2015.

IV. forduló

MEGOLDÁSOK

4. **Melyek azok a kétjegyű számok**, amelyeket 13-mal osztva a kapott maradék annyi, mint a szám 11-gyel való osztásakor kapott hányados, és a 11-gyel való osztáskor kapott maradék is annyi, mint a 13-mal való osztáskor kapott hányados?

MEGOLDÁS:

Írjuk fel a számot: $N = 13a + b$ alakban.
(Ahol a N → a keresett szám; a → hányados; b → maradék.)

Írjuk fel a számot a másik feltételnek megfelelően: $N = 11b + a$ alakban!

Ha két egyenlet bal oldala megegyezik, akkor a jobb oldalak is megegyeznek.
Az egyenletet rendezve.

$$13a + b = 11b + a$$
$$12a = 10b$$
$$6a = 5b$$

Mivel a és b egész számok, akkor a → 5 többszöröse, valamint a b → 6 többszöröse.

Ha a = 5 és b = 6, akkor N = 71.

Ha a = 10 és b = 12, akkor N = 142. Nem kétjegyű, így már nem kapunk több jó megoldást.

A keresett szám a 71.

A feladatra 10 pont kapható.

5. A következő szorzásban 4 számjegy olvashatatlan, helyüket ○ jelöli: ○2○×13=2○○1. **Keressük meg a hiányzó számokat!**

MEGOLDÁS:

Egy háromjegyű számot szorzunk 13 – mal és négyjegyű számot kapunk eredményül, ahol az ezresek helyén kettes számjegy áll.

A keresett szám 153 és 231 között található.
(2991 : 13 = 230,0769 és 2001 : 13 = 153,923)

Mivel a háromjegyű számban a tízesek helyén a kettes áll, akkor a legnagyobb szám a 129.

$129 \cdot 13 = 1677$ → nem megoldás.

A százsok helyén a kettes áll, akkor

22☐*13 = 2☐☐1

Egy szorzat utolsó számjegyét az utolsó számjegyek szorzata adja meg.

A 3 – at 7 – tel kell megszorozni, az utolsó számjegy 1 legyen.

Akkor 227 * 13 = 2951.

A keresett számjegyek: 2; 7; 9; 5.

A feladatra pont kapható.