BÖLCS BAGOLY LEVELEZŐS MATEMATIKAVERSENY

2014 – 2015.

V. forduló

MEGOLDÁSOK

1. **Hány olyan pozitív egész van, amely 1000-nél kisebb és tízes számrendszerbeli felírásához legalább egy 9-es számjegye van szükségünk?**

MEGOLDÁS:

Ha a szám egyjegyű: **1 db**.

Ha a szám kétjegyű: 19, 29, …, 89 → **8 darab**, valamint 90, 91, … , 99 → **10 darab**.

Ha a szám háromjegyű:
Az első számjegy 1: 1 db + 8 db + 10 db = 19 darab.
Az első számjegy: 2 → lásd előbb. = 19 darab.
Az első számjegy: 1 – 8 –ig → 8 ·19 darab = **152 darab**.

Az első számjegy: 9 → **100 darab**.

1 db + 8 db + 10 db + 152 db + 100 db = 271 db

A feltételeknek 271 darab szám felel meg.

A feladatra 10 pont kapható

BÖLCS BAGOLY LEVELEZŐS MATEMATIKAVERSENY

2014 – 2015.

V. forduló

MEGOLDÁSOK

2. **Hányféleképpen lehet felváltani egy 1000 Ft-ost 100, 200 és 500 Ft-osokra (nem kell minden címletet felhasználni)?**

MEGOLDÁS:

1000 Ft = 500 Ft + 500 Ft.

Ha 1 db 500 Ft-ost használunk, akkor

1000 Ft = 500 Ft + 2·200 Ft + 100 Ft,

vagy

1000 Ft = 500 Ft + 200 Ft + 3·100 Ft

vagy

1000 Ft = 500 Ft + 5·100 Ft

Ha nem használunk 500 Ft-ost, akkor

1000 Ft = 5·200 Ft,

vagy

1000 Ft = 4·200 Ft + 2·100 Ft,

vagy

1000 Ft = 3·200 Ft + 4·100 Ft,

vagy

1000 Ft = 2·200 Ft + 6·100 Ft,

vagy

1000 Ft = 200 Ft + 8·100 Ft,

vagy

1000 Ft = 10·100 Ft,

Összesen 10 lehetőség található.

A feladatra 8 pont kapható.

BÖLCS BAGOLY LEVELEZŐS MATEMATIKAVERSENY

2014 – 2015.

V. forduló

MEGOLDÁSOK

3. **Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelynek tízes számrendszerbeli alakjában a számjegyek szorzata 5040?**

MEGOLDÁS:

A számjegyek között nem szerepelhet a nulla, mert akkor a számjegyek szorzata nulla lenne.

$$5040 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7.$$

Ahhoz, hogy minél kevesebb számjegye legyen a számnak, ahhoz minél több prímtényezőt kell összevonni.

Az 5 és a 7 nem vonható össze, mert akkor már nem kapnánk számjegyet.

Az 5 és 7 mindenképpen számjegy, akkor 144 – et kell előállítani a lehető legkevesebb számjegy szorzataként.

Összesen négy összevonási lehetőség van:

1. lehetőség: $2 \cdot 2 = 4$, akkor $36 = 4 \cdot 9$ → 44 579

2. lehetőség: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, akkor $18 = 2 \cdot 9$ vagy $18 = 3 \cdot 6$ → 25 789 vagy 35 678

3. lehetőség: $2 \cdot 3 = 6$, akkor $24 = 4 \cdot 6$ vagy $3 \cdot 8$ → 45 667 vagy 35 678

4. lehetőség: $3 \cdot 3 = 9$, $16 = 4 \cdot 4$ vagy $16 = 2 \cdot 8$ → 44 579 vagy 25 789

A legkisebb szám a 25789.

A feladatra 10 pont kapható.

BÖLCS BAGOLY LEVELEZŐS MATEMATIKAVERSENY

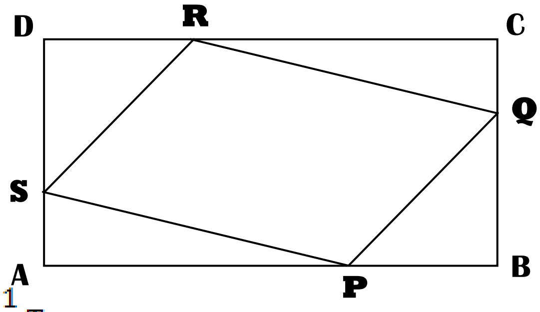
2014 – 2015.

V. forduló

MEGOLDÁSOK

4. Az ABCD téglalap megfelelő oldalainak harmadoló pontjai a P; Q; R; S pontok. **Hányad része az ABCD téglalap területének a PQRS paralelogramma?**

MEGOLDÁS:



Számoljuk ki az **APS** derékszögű háromszög területét!
(Derékszögű háromszög területe = a befogók szorzatának fele.)
Az **AP** befogó az **AB** oldal hosszának két harmada.
Az **AS** befogó az **AD** oldal hosszának harmada.
Akkor

$$T_{APS} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} AB \cdot \frac{1}{3} AD = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot AB \cdot AD = \frac{1}{9} \cdot AB \cdot AD = \frac{1}{9} T_{ABCD}$$

A **CRQ** háromszög egybevágó az **APS** háromszöggel, így a területük is megegyezik.

Számoljuk ki az **BQP** derékszögű háromszög területét!
Az **PB** befogó az **AB** oldal hosszának harmada. Az **BQ** befogó az **BC** oldal hosszának két harmada.
Akkor

$$T_{BQP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} AB \cdot \frac{2}{3} BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{9} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{9} T_{ABCD}$$

A **BQP** háromszög egybevágó az **DRS** háromszöggel, így a területük is megegyezik.

A paralelogramma területe:

$$T_{PQRS} = T_{ABCD} - (2 \cdot T_{APS} + 2 \cdot T_{BQP}) = T_{ABCD} - \left(2 \cdot \frac{1}{9} T_{ABCD} + 2 \cdot \frac{1}{9} T_{ABCD}\right) =$$

$$T_{ABCD} - \left(\frac{4}{9} T_{ABCD}\right) = \frac{5}{9} T_{ABCD}$$

A **PQRS** paralelogramma területe öt kilenced része az **ABCD** téglalap területének.

A feladatra 10 pont kapható.

BÖLCS BAGOLY LEVELEZŐS MATEMATIKAVERSENY

2014 – 2015.

V. forduló

MEGOLDÁSOK

5. Egy háromjegyű és egy kétjegyű tízes számrendszerben felírt szám összege 163. Ha mindkét számban megfordítjuk a számjegyek sorrendjét, akkor az így kapott számok összege 375. **Melyik ez a két szám?**

MEGOLDÁS:

Legyen a háromjegyű szám $\overline{abc}$, a kétjegyű pedig $\overline{de}$.

Írjuk fel a feladat feltételeinek megfelelő egyenletet (a számokat összegalakban írjuk fel)!

$100a + 10b + c + 10\,d + e = 168,$

$100c + 10b + a + 10e + d = 375.$

A második egyenletből vonjuk ki az első egyenletet!

$100c - 100a + a - c + 10e - 10d + d - e = 207,$

$99c - 99a + 9e - 9d = 207,$

Mindkét oldalt osztva 9 – cel

$11c - 11a + e - d = 23,$

$11(c - a) + e - d = 23.$

Mivel a, c, d, e számjegyek, akkor c – a értéke 1 vagy 2 lehet.

Ha $c - a = 1$, akkor $11 + e - d = 23$

$e - d = 12$ ez nem lehet, mert e és d is számjegy.

Ha $c - a = 2$, akkor $22 + e - d = 23$

$e - d = 1,\ e = d + 1$

A feladat feltételeiből következik, hogy **a = 1**, akkor a $c - a = 2$ egyenletből **c = 3**.

Az első egyenletbe visszaírva:

$100 + 10b + 3 + 10d + d + 1 = 168,$

$104 + 10b + 11d = 168,$

$10b + 11d = 64$, akkor $11d = 64 - 10b$, akkor a $64 - 10b$ osztható 11 – gyel.

A lehetséges értékek: 11, 22, 33, 44, 55.

$64 - 10b = 11, \rightarrow 10b = 53$, nincs megoldás,

$64 - 10b = 22, \rightarrow 10b = 42$, nincs megoldás,

$64 - 10b = 33, \rightarrow 10b = 31$, nincs megoldás,

$64 - 10b = 44, \rightarrow 10b = 20, \rightarrow$ **b = 2**, $\rightarrow$ **d = 4,** $\rightarrow$ **e = 5.**

$64 - 10b = 55, \rightarrow 10b = 9$, nincs megoldás.

BÖLCS BAGOLY LEVELEZŐS MATEMATIKAVERSENY

2014 – 2015.

V. forduló

MEGOLDÁSOK

a = 1, b = 2, c = 3, d = 4, e = 5.

Ellenőrzés: $123 + 45 = 168$,

$321 + 54 = 375$.

A keresett számok: 123 és 45.

A feladatra 12 pont kapható.